УДК 519.873

М.С. Скворцов

МЕТОДИКА ОПТИМИЗАЦИИ НАДЕЖНОСТИ СИСТЕМ С СЕТЕВОЙ СТРУКТУРОЙ

Скворцов М.С. **Методика оптимизации надежности систем с сетевой структурой.**
Аннотация. Показаны особенности моделирования и расчета надежности систем с сетевой структурой. Приведены методика оптимизации надежности данных систем, использующая алгоритм логико-вероятностной оптимизации надежности, и результаты решения задач оптимизации надежности. Проведено сравнение полученных решений с решениями, полученными другими методами.
Ключевые слова: оптимизация надежности, сетевая структура, общий логико-вероятностный метод, схема функциональной целостности.

Skvortsov M.S. **Reliability optimization technique for network structure systems.**
Abstract. The article shows distinctive features of reliability calculations and simulating for network structure systems. Reliability optimization technique for network structure systems which is based on logical-probabilistic reliability optimization algorithm is provided. The article presents results of reliability optimization tasks solving for network structure systems. These results are compared with solutions received using other techniques.
Keywords: reliability optimization, network structure, common logical-probabilistic method, functional integrity scheme.

1. Введение. Многие практические задачи оптимизации надежности, связанные с информационными сетями, трубопроводными и энергетическими системами, можно представить в виде сетевой модели. В контексте данной работы под сетью понимается структурный объект, свойства которого представляются в виде сетевой схемы функциональной целостности.

Моделью для информационных сетей, содержащих ненадежные элементы, обычно является ненаправленный граф $G(E,V)$ с набором узлов V и ребер E [4]. Ребра могут находиться только в двух состояниях:

1) работоспособности (с заданной вероятностью p_{ij}),

2) отказа (с заданной вероятностью $1-p_{ij}$).

Под вероятностью p_{ij} будем понимать вероятность того, что ребро (i, j) находится в работоспособном состоянии в случайный момент времени. Типовые допущения для данной модели:

— отказы ребер являются независимыми;
— узлы являются абсолютно надежными;
— восстановление отказавших ребер отсутствует.

В данной работе в качестве модели сетевых структур используется схема функциональной целостности (СФЦ). Для построения логических функций работоспособности системы и вероятностных функций использовался программный комплекс АРБИТР [2].

2. Оценка надежности систем с сетевой структурой. Условием работоспособности сети будем считать возможность передачи информации от любого узла к любому другому узлу. Количественной оценкой такой возможности является всетерминальная мера надежности R_v — вероятность того, что все узлы сети связаны друг с другом [6, 8].

В других случаях интересуются коммуникацией только между двумя конкретными узлами сети — так называемыми источником (*source*) и приемником (*terminal*). Количественная оценка для данного случая — двухтерминальная надежность $R_{S,T}$, которая есть вероятность того, что существует как минимум один работоспособный путь передачи информации от узла s к узлу t [6, 8].

Практические задачи оптимизации надежности, связанные с использованием этих моделей, возникают в электрических сетях, транспортных системах, при анализе архитектур отказоустойчивых компьютеров и коммуникационных систем.

При анализе надежности систем с сетевой структурой помимо трудностей, присущих всем структурно-сложным системам, появляется дополнительное затруднение, связанное с тем, что структура таких систем содержит кольцевые фрагменты, для корректного раскрытия которых в схему функциональной целостности [1] этой структуры должны быть внесены специальные изменения. Исходная схема простейшей кольцевой сети и соответствующая ей СФЦ изображена на рис. 1.

а *б*

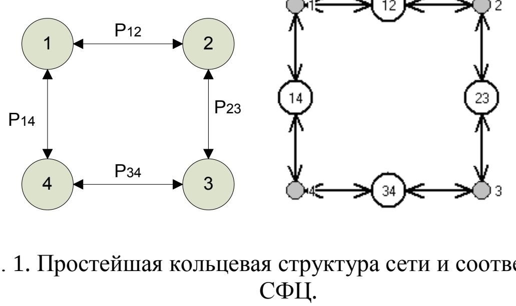

Рис. 1. Простейшая кольцевая структура сети и соответствующая ей СФЦ.

Здесь узлы сети считаются абсолютно надежными и представлены на исходной схеме сети вершинами 1–4 (см. рис. 1.а). В СФЦ этой сети указанные узлы представлены фиктивными вершинами 1–4. Дуги сети характеризуются случайными событиями их безотказной работы и представлены в СФЦ на рис. 1 функциональными вершинами 12, 14, 23 и 34.

Как было указано выше, условием функционирования сети является наличие хотя бы одного работоспособного пути, связывающего между собой все узлы сети, тогда логический критерий ее успешного функционирования можно записать в виде:

$$Y_S = y1 \vee y2 \vee y3 \vee y4 .$$

Система логических уравнений для СФЦ сети имеет вид:

$$\begin{cases} y1 = x1 \wedge \left(y12 \vee y14\right) = y12 \vee y14 \\ y2 = x2 \wedge \left(y12 \vee y23\right) = y12 \vee y23 \\ y3 = x3 \wedge \left(y34 \vee y23\right) = y34 \vee y23 \\ y4 = x4 \wedge \left(y14 \vee y34\right) = y14 \vee y34 \end{cases}.$$

Данная система неразрешима из-за того, что СФЦ сети полностью циклическая. Введение дополнительной фиктивной вершины (дополнительного логического условия) в СФЦ позволяет получить систему уравнений, которую можно решить, и получить логическую функцию работоспособности сети. Система логических уравнений после добавления фиктивной вершины (рис. 2 вариант 1), запишется следующим образом:

$$\begin{cases} y1 = \text{true} \\ y2 = x12 \wedge \left(x14 \vee x34 \vee x23\right) \\ y3 = \left(x12 \vee x23\right) \wedge \left(x14 \vee x34\right) \\ y4 = \left(x12 \vee x34 \vee x23\right) \wedge x14 \end{cases}.$$

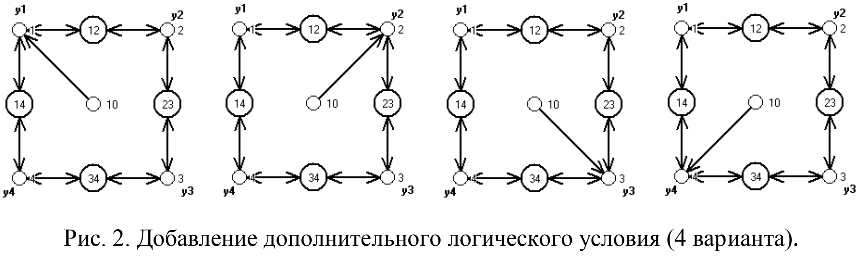

Рис. 2. Добавление дополнительного логического условия (4 варианта).

Объединяя результаты в

$$Y_S = y1 \vee y2 \vee y3 \vee y4$$

и минимизируя полученную логическую функцию, находим искомую логическую функцию работоспособности системы для данной сетевой системы:

$$Y_S = \left(x12 \vee x23 \vee x34\right) \wedge \left(x12 \vee x14 \vee x34\right) \wedge \left(x14 \vee x12 \vee x23\right) \wedge$$
$$\wedge \left(x14 \vee x34 \vee x23\right).$$

На рис. 2 изображены все возможные варианты добавления в СФЦ дополнительного логического условия, позволяющего получить логическую функцию работоспособности системы. Все четыре варианта эквивалентны и приводят к одинаковому результату.

Описанный способ модификации СФЦ сетевых структур позволяет получать логическую функцию работоспособности, а затем и многочлен вероятностной функции при помощи одного из известных методов [1, 7].

3. Задача оптимизации надежности систем с сетевой структурой. Запишем математическую формулировку задачи оптимизации надежности системы при ограничении на ее стоимость в общем виде:

$$P_S\left(X\right) \to \max_{X \in D}; \;\; D \subseteq A;$$

$$D = \left\{X \in A / \; C\left(X\right) \le C_0\right\}$$

При решении задачи применялся логико-вероятностный алгоритм оптимизации надежности, детально описанный в [3]. В нем использованы первые частные производные при выборе направления для оптимизации на каждом шаге в предположении, что в данной задаче локально оптимальный выбор на каждом шаге приводит к оптимальному решению. Поэтому данный алгоритм оптимизации можно отнести к классу «жадных». К его дополнительным особенностям относится возможность нарушения ограничений при поиске (выход за границы области допустимых решений во время поиска). Алгоритм реализован в виде отдельного программного модуля и встроен в программный комплекс АРБИТР.

Пример 1. Рассматривается структура сети, состоящая из четырех абсолютно надежных узлов (11—14) и шести коммуникационных каналов (1—6) (табл. 1). Данная задача взята из [5].

Требуется найти такую конфигурацию структуры и элементный состав, чтобы надежность передачи информации по сети была бы максимальна при ограничении на ее стоимость $C_S = 15$. Расчетные выражения имеют вид:

$$P_S(X) \to \max_{X \in D}; \ D \subseteq A;$$

$$D = \left\{ X \in A / \sum_{i=1}^{N} C(x_i) \le 15 \right\},$$

$$C_i = \alpha_i \exp\left[\frac{\beta_i}{1 - R(j)} \right].$$

Таблица 1. **Исходные данные для примера № 1**

j	1	2	3	4	5	6
α_j	4,4	0,65	0,45	1,4	2,4	2,5
β_j	0,002	0,25	0,016	0,12	0,02	0,03
$p(j)$; $C(j)$	0,88; 4,444 0,92; 4,474 0,8; 4,511 0,99; 5,374	0,7; 1,496 0,75; 1,767 0,8; 2,269 0,85; 3,441	0,9;0,528 0,95;0,620 0,99;2,229 —	0,8; 2,551 0,85; 3,116 0,9; 4,648 —	0,95; 3,580 0,98; 6,524 — —	0,85; 3,054 0,9; 3,375 0,92; 3,637 0,95; 4,555

Критерием работоспособности данной сетевой структуры считается наличие связи (возможность передачи информации) между всеми узлами сети. Тогда логический критерий успешного функционирования запишется в следующем виде:

$$Y_S = y11 \vee y12 \vee y13 \vee y14.$$

Чтобы система логических уравнений, представленная СФЦ на рис. 3, стала разрешимой, необходимо перед построением логической функции работоспособности системы модифицировать СФЦ сетевой структуры, как описано выше. Полученная логическая функция работоспособности системы рассматриваемой структуры имеет вид:

$$\begin{gathered}
Y_S = (x1 \wedge x2 \wedge x3) \vee (x1 \wedge x3 \wedge x6) \vee \\
\vee (x2 \wedge x3 \wedge x6) \vee (x3 \wedge x5 \wedge x6) \vee \\
\vee (x1 \wedge x2 \wedge x5) \vee (x1 \wedge x3 \wedge x5) \vee (x1 \wedge x5 \wedge x6) \vee (x2 \wedge x5 \wedge x6) \vee \\
\vee (x1 \wedge x2 \wedge x4) \vee (x1 \wedge x3 \wedge x4) \vee (x1 \wedge x4 \wedge x6) \vee (x2 \wedge x3 \wedge x4) \vee \\
\vee (x2 \wedge x4 \wedge x6) \vee (x2 \wedge x4 \wedge x5) \vee (x3 \wedge x4 \wedge x5) \vee (x4 \wedge x5 \wedge x6).
\end{gathered}$$

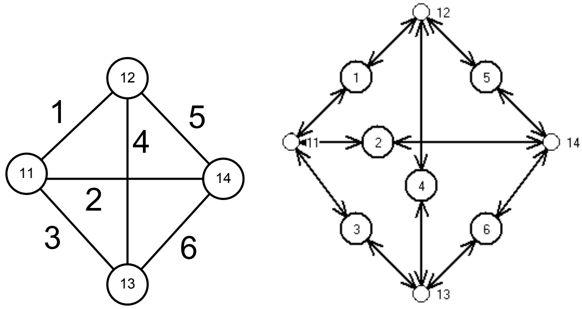

Рис. 3. Пример сетевой структуры и соответствующая ей СФЦ.

Расчетный многочлен вероятностной функции состоит из 16 одночленов:

$$
\begin{gathered}
P(Y) = P1P2P3 + P1Q2P3P6 + Q1P2P3P6 + Q1Q2P3P5P6 + \\
+ P1P2Q3Q5 + P1Q2P3P5Q6 + P1Q2Q3P5P6 + Q1P2Q3P5P6 + \\
+ P1P2P4Q3Q5 + P1Q2P3P4Q5Q6 - P1Q2Q3P4Q5P6 - \\
- Q1P2P3P4Q6 - Q1P2Q3P4Q5P6 - Q1P2Q3P4P5Q6 - \\
- Q1Q2P3P4P5Q6 - Q1Q2Q3P4P5P6.
\end{gathered}
$$

С использованием логико-вероятностного алгоритма оптимизации надежности получено оптимальное решение рассматриваемой задачи, совпавшее с решением, приведенным в [5] по составу и стоимости системы:

1) состав системы (4, 2, 2, 0, 1, 3);
2) стоимость системы 14,98;
3) надежность системы 0,9946025.

Несколько различаются оценки надежности этого оптимального варианта построения сетевой системы. К сожалению, авторы статьи [5] не приводят аналитическое выражение, использованное для расчета вероятности безотказной работы оптимизированной системы, поэтому окончательных выводов сделать нельзя. В остальном совпадение результатов подтверждает работоспособность данной методики логико-вероятностной оптимизации надежности систем сетевой структуры.

Пример 2. В данном примере (рис. 4) рассмотрена сеть, состоящая из пяти абсолютно надежных узлов (8, 9, 10, 11, 12) и семи коммуникационных каналов (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) [5] (табл. 2).

Требуется найти конфигурацию сети и ее элементный состав, чтобы надежность передачи информации из любого узла в любой другой узел была бы максимальной при ограничении на стоимость Cs=15.

$$P_S(X) \to \max_{X \in D};\ \ D \subseteq A;$$

$$D = \left\{ X \in A / \sum_{i=1}^{N} C(x_i) \le 15 \right\}$$

Критерием работоспособности данной сетевой структуры является возможность обмена информацией между любыми двумя узлами сети. Тогда логический критерий запишется в следующем виде:

$$Y_S = y8 \wedge y9 \wedge y10 \wedge y11 \wedge y12$$

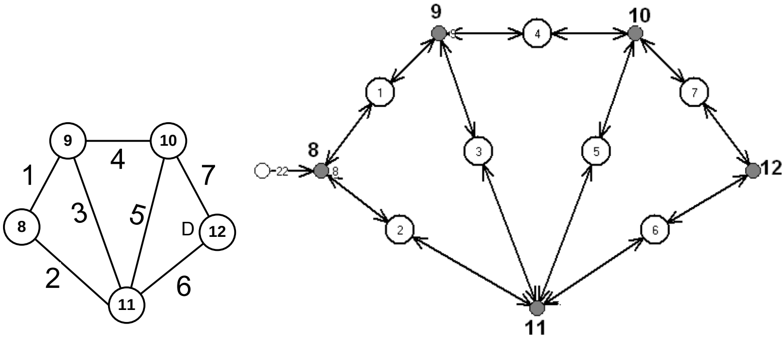

Рис. 4. Функциональная схема и СФЦ работоспособности сети

Таблица 2. **Исходные данные № 1 для примера № 2**

j	1	2	3	4	5	6	7
$\lambda_j\ (10^{-4})$, 1/ч	2.1	1.2	7.1	2.1	2.1	1.2	7.1
$\mu_j\ (10^{-3})$, 1/ч	1.0	2.5	3.4	4.5	3.7	4.0	5.0
$C(j)$	5.0	3.0	2.0	4.0	6.0	4.0	2.0
T	8760 ч						

Логическая функция работоспособности системы содержит 21 кратчайший путь успешного функционирования:

$$
\begin{aligned}
Y_S = {} & (x1 \wedge x6 \wedge x2 \wedge x4) \vee (x6 \wedge x2 \wedge x3 \wedge x4) \vee (x1 \wedge x6 \wedge x2 \wedge x5) \vee \\
& \vee (x6 \wedge x2 \wedge x3 \wedge x5) \vee (x6 \wedge x2 \wedge x5 \wedge x4) \vee (x1 \wedge x6 \wedge x2 \wedge x7) \vee \\
& \vee (x6 \wedge x2 \wedge x3 \wedge x7) \vee (x6 \wedge x2 \wedge x4 \wedge x7) \vee (x1 \wedge x6 \wedge x3 \wedge x4) \vee \\
& \vee (x1 \wedge x6 \wedge x3 \wedge x5) \vee (x1 \wedge x6 \wedge x3 \wedge x7) \vee (x1 \wedge x6 \wedge x5 \wedge x4) \vee \\
& \vee (x1 \wedge x2 \wedge x4 \wedge x7) \vee (x1 \wedge x3 \wedge x4 \wedge x7) \vee (x1 \wedge x5 \wedge x4 \wedge x7) \vee \\
& \vee (x1 \wedge x6 \wedge x4 \wedge x7) \vee (x2 \wedge x3 \wedge x4 \wedge x7) \vee (x1 \wedge x2 \wedge x5 \wedge x7) \vee \\
& \vee (x2 \wedge x3 \wedge x5 \wedge x7) \vee (x2 \wedge x5 \wedge x4 \wedge x7) \vee (x1 \wedge x3 \wedge x5 \wedge x7).
\end{aligned}
$$

Соответствующий вероятностный многочлен состоит из 21 одночлена:

$$
\begin{aligned}
P(Y) = {} & P1P2P4P6 + Q1P2P3P4P6 + P1P2P4P5P6 + \\
& + Q1P2P3Q4P5P6 + Q1P2Q3P4P5P6 + P1P2Q4Q5P6P7 + \\
& + Q1P2P3Q4Q5P6P7 + Q1P2Q3P4Q5P6P7 + P1Q2P3P4P6 + \\
& + P1Q2P3P4P5P6 + P1Q2P3Q4Q5P6P7 + P1Q2Q3P4P5P6 + \\
& + P1P2P4Q6P7 + P1Q2P3P4Q6P7 + P1Q2Q3P4P5Q6P7 + \\
& + P1Q2Q3P4Q5P6P7 + Q1P2P3P4Q6P7 + P1P2P4P5Q6P7 + \\
& + Q1P2P3Q4P5Q6P7 + Q1P2Q3P4P5Q6P7 + P1Q2P3Q4P5Q6P7.
\end{aligned}
$$

С использованием логико-вероятностного алгоритма оптимизации надежности получено решение оптимизационной задачи, полностью совпавшее с решением, приведенным в [5]:

1) состав системы (0, 1, 1, 1, 0, 1, 1);
2) стоимость системы 15;
3) надежность системы 0,93420.

Совпадение результатов подтверждает работоспособность метода логико-вероятностных значимостей и вкладов.

Увеличим размерность задачи следующим образом. Пусть для каждого из семи коммуникационных каналов можно использовать один из семи типов оборудования. Число возможных вариантов построения системы равно $8.2 \cdot 10^6$ (табл. 3).

Таблица 3. **Исходные данные № 2 для примера № 2**

i	1	2	3	4	5	6	7
pi	0,7	0,75	0,8	0,85	0,88	0,9	0,92
$C(j)$	1	2	3	5	8	13	21

С использованием логико-вероятностного алгоритма оптимизации надежности получено следующее решение оптимизационной задачи:

1) состав системы (6, 7, 5, 5, 5, 7, 7);
2) стоимость системы 100;
3) надежность системы 0,98094.

Рассмотренные задачи показывают возможность применения разработанной методики и алгоритма для решения задач оптимизации надежности технических систем сетевой структуры.

4. Заключение. Многие практические задачи оптимизации надежности, связанные с информационными сетями, трубопроводными системами и системами, можно представить в виде сетевой модели. В статье предложена методика построения математической модели сетевых структур для моделирования, анализа и оптимизации надежности. Показана возможность использования логико-вероятностного алгоритма оптимизации надежности для систем сетевой структуры. Рассмотрены примеры задач оптимизации надежности сетевых систем. Решения, полученные с помощью данной методики, подтверждены сравнением с решениями, полученными другими авторами.

Литература

1. *Можаев А.С.* Общий логико-вероятностный метод анализа надежности структурно-сложных систем. Уч. пос. Л.: Изд. ВМА, 1988. 68 с.
2. *Можаев А.С* Программный комплекс автоматизированного структурно-логического моделирования и расчета надежности и безопасности систем АРБИТР // Свидетельство об официальной регистрации № 2003611101. М.: Роспатент РФ, 2003. 1 с.
3. *Скворцов М.С.* Решение задачи оптимизации надежности с помощью метода логико-вероятностных вкладов // Надежность. 2009. № 2(30). С. 15–29.
4. *Konak A., Smith A.E.* Network reliability optimization // Handbook of optimization in telecommunications / eds M.G. Resende, P.M. Pardalos. NY, 2006. P. 733–760.
5. *Misra K.B., Sharma U.* An efficient algorithm to solve integer programming problems arising in system reliability design // IEEE Trans. Reliability. Vol. 40, N 1, 1991. P. 81–91.
6. *Rubino G.* Network reliability evaluation // State-of-the art in performance modeling and simulation. NY, 1998. P. 275–302
7. *Sahinoglu M., Rice B.* Network reliability evaluation // WIREs Comp Stat. Vol. 2. 2010. P. 189–211
8. *Shooman M.* Reliability of computer systems and networks. Fault tolerance, analysis and design. NY: John Wiley & Sons, 2002. 528 p.

Скворцов Михаил Сергеевич — ведущий инженер-программист. ОАО Специализированная инжиниринговая компания «Севзапмонтажавтоматика»**.** Область научных интересов: оптимизация надежности, структурно-сложные системы, сетевые системы, разработка методик, алгоритмов и программ оптимизации и автоматизированного моделирования. Число научных публикаций — 7. mikhail_skvortsov@szma.com, www.szma.com. ОАО «СПИК СЗМА», пер. Каховского, д.10, Санкт-Петербург, 199155, РФ; р.т.+7(812)351-66-72. Научный руководитель — А.А. Мусаев.

Skvortsov Mikhail Sergeevich — Leading Programming Engineer of Specialized Engineering Company “Sevzapmontageautomatica” (JSC SPIK SZMA). Research interests: reliability optimization, structurally complex systems, network systems, development of techniques, algorithms and software for automated simulation and optimization. Number of publications — 7. mikhail_skvortsov@szma.com, www.szma.com. JSC SPIK SZMA, 10, Kakhovskogo Lane, St.Petersburg, 199155, Russia, office phone: +7(812)351-66-72. Research Adviser — A.A. Musaev.

РЕФЕРАТ

Скворцов М.С. **Методика оптимизации надежности систем с сетевой структурой.**

Многие практические задачи оптимизации надежности, связанные с информационными сетями, трубопроводными и энергетическими системами, можно представить в виде сетевой модели. В данной работе в качестве модели сетевых структур используется схема функциональной целостности (СФЦ). Для построения логических функций работоспособности системы и вероятностных функций использован программный комплекс АРБИТР.

В исследованиях, посвященных анализу и оптимизации надежности сетей наибольшее распространение получили две постановки задачи. В первой условием работоспособности сети обычно считается возможность передачи информации от любого узла к любому другому узлу. Во второй, более частной постановке анализируется коммуникация только между двумя конкретными узлами сети — так называемыми источником и приемником, и за условие работоспособности сети принимают возможность обмена информацией между двумя выбранными узлами. В данной работе задача рассматривается в первой, более общей, постановке. Также считается, что ненадежными являются только связи между абсолютно надежными узлами сети.

При анализе надежности систем с сетевой структурой помимо трудностей, присущих всем структурно-сложным системам, появляется дополнительное затруднение. Оно связано с тем, что структуры сетевых систем содержат кольцевые фрагменты, в результате чего система логических уравнений становится неразрешимой. Для корректного снятия логической неопределенности и возможности решения системы логических уравнений, необходимо добавить в нее дополнительное логическое условие, т. е. добавить в схему функциональной целостности (представляющую собой графическую запись системы логических уравнений) дополнительную вершину (дополнительное логическое условие). В работе показана инвариантность кольцевого фрагмента структуры к добавлению дополнительного логического условия.

Показана также возможность использования логико-вероятностного алгоритма оптимизации надежности для систем сетевой структуры. Приведено решение двух задач оптимизации надежности систем с сетевой структурой. Решения, полученные с помощью данной методики, подтверждены сравнением с решениями, полученными другими авторами.

SUMMARY

Skvortsov M.S. **Reliability optimization technique for network structure systems.**

Many practical tasks of reliability optimization for information networks, pipeline and energy systems may be represented as a network model. Network structure model is presented using the functional integrity scheme (FIS). Software complex ARBITER is used for generating logical functions of the system operability and probabilistic functions.

The studies concerned with network reliability analysis and optimization, most commonly use two problem settings. In the first task definition, a condition of the network operability is data exchange between any two nodes. A more partial problem setting analyzes only data communication between two specific network nodes — a source and a terminal. Thus, a condition of the network operability is data exchange between two selected nodes. The article adopts the first, general task setting. Furthermore, it is assumed that only links between absolutely reliable nodes are unreliable.

Reliability analysis of network structure systems has challenges attributed to all structurally complex systems. Furthermore, there is one more problem. Structures of network systems contain loop fragments, thus making a logical equations system unsolvable. For consistent solving this logical indeterminacy, enabling solution of the logical equations system, it is necessary to make an additional logical condition. Thus, an additional node (additional logical condition) is added to the functional integrity scheme (which is a graphic presentation of the logical equations system). The article shows invariance of the structure loop fragment to this additional logical condition.

The article gives evidence of possible application of logical-probabilistic algorithm for reliability optimization of network structure systems. Two reliability optimization tasks for network structure systems are provided. The results received using the proposed technique, are compared with other authors' solutions.